نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۳/۱۰/۲۲**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی۱-فنی**

(رشته‌های مهندسی برق، پزشکی، صنایع، عمران، کامپیوتر، مکانیک)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۴** - **۱۴۰۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

سوال ۱- معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=\ln(\cos^{۲} x+۳)$ را در نقطه $x=\frac{\pi}{۴}$ بدست آورید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۲- با استفاده از مشتق، مقدار تقریبی $A=\arctan(۰/۹۶)$ را بدست آورید. **(۱۰ نمره)**

(توجه دارید که $\arctan x=\tan^{-۱} x$)

سوال ۳- نمودار تابع زیر را با بیان تمام جزئیات رسم کنید. (مجانب‌ها، اکسترمم‌ها و . . .) **(۲۰ نمره)**

$$f(x)=\frac{-x^{۲}}{x^{۲}-x-۲}$$

سوال ۴- حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید : **(۳۰ نمره)**

الف) $\int \frac{x\sin x^{۲}}{۴+\cos x^{۲}}dx$ ب) $\int \frac{۳x+۴}{x^{۳}+۴x}dx$ ج) $\int_{۳}^{۹}\ln(۳x)dx$

سوال ۵- حجم جسم صلب حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x-x^{۲}$ و $y=۰$ حول محور xها را بدست آورید : **(۱۵ نمره)**

سوال ۶- همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^{۳}+۲e^{x}}$ را بررسی کنید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۷- طول قوس منحنی تابع $f(x)=\int_{۳}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t^{۲}-۱}}$ را در فاصله $۳\le x\le ۴$ را بدست آورید. **(۱۵ نمره)**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان‌ترم ریاضی۱-فنی

نیمسال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۳

پاسخ سوال۱ : چون $f(\frac{\pi}{۴})=\ln(\frac{۱}{۲}+۳)=\ln\frac{۷}{۲}$ پس خط مماس از نقطه $(\frac{\pi}{۴},\ln\frac{۷}{۲})$ بگذرد.

$$f'(x)=\frac{-۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x+۳}\ \to\ f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{-۲}{۷}\ \to\ m=\frac{-۱}{f'(\frac{\pi}{۴})}=\frac{۷}{۲}\ \to\ y-\ln\frac{۷}{۲}=\frac{۷}{۲}(x-\frac{\pi}{۴})\ \to\ y=\frac{۷}{۲}x+\ln\frac{۷}{۲}-\frac{۷\pi}{۸}$$

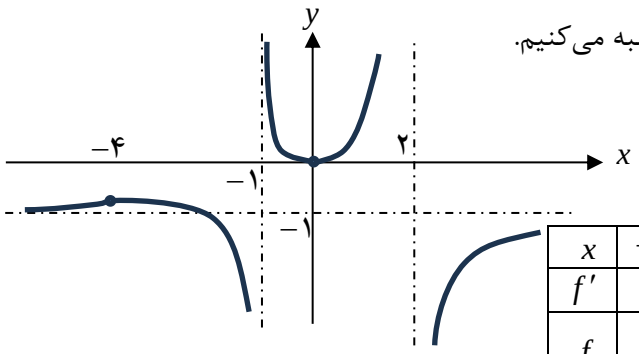
پاسخ سوال۲ : تابع $f(x)=\arctan x$ را در نظر می‌گیریم. داریم : $f(۱)=\arctan ۱=\frac{\pi}{۴}\ ,\ \ f'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}\ \to\ f'(۱)=\frac{۱}{۲}$

و بنابر این : $\arctan ۰٫۹۶=f(۰٫۹۶)=\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}(۰٫۹۶-۱)=۰٫۷۸۵-۰٫۰۲=۰٫۷۶۵$

پاسخ سوال۳ : ابتدا دامنه تابع را مشخص می‌کنیم. $x^۲-x-۲=۰\ \to\ x_۱=-۱\ ,\ x_۲=۲\ \to\ D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$

چون $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=-۱$ پس $y=-۱$ مجانب افقی منحنی و چون $\lim\limits_{x\to-۱}f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to۲}f(x)=\pm\infty$ آنگاه $x=-۱$ و $x=۲$ دو مجانب قائم آن هستند. مشتق تابع و ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{x^۲+۴x}{(x^۲-x-۲)^۲}\qquad \begin{cases} f'(x)=۰\ \to\ x^۲+۴x=۰ \\ \to\ x_۳=۰\ ,\ \ x_۴=-۴\end{cases}$$



جدول تغییرات تابع را کامل می‌کنیم.

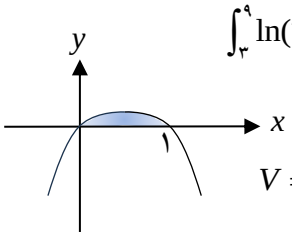
x	$-\infty$		-۴		-۱		۰		۲		∞
f'		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
f	-۱	$\nearrow$	$-\frac{۸}{۹}$	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	۰	$\nearrow$	∞	$-\infty$ $\nearrow$ -۱

پاسخ سوال۴ : الف) چون $(۴+\cos x^۲)'=-۲x\sin x^۲$ پس داریم : $\int\frac{x\sin x^۲}{۴+\cos x^۲}dx=\frac{-۱}{۲}\ln(۴+\cos x^۲)+c$

ب) $\int\frac{۳x+۴}{x^۳+۴x}dx=\int\frac{۳x+۴}{x(x^۲+۴)}dx=\int(\frac{۱}{x}+\frac{-x+۳}{x^۲+۴})dx=\ln x-\frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۴)+\frac{۳}{۲}\arctan\frac{x}{۲}+c$

ج) با فرض $u=\ln(۳x)$ و $dv=dx$ داریم $du=\frac{dx}{x}$ و $v=x$ و در نتیجه به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت :

$$\int_۳^۹\ln(۳x)dx=\left[x\ln(۳x)\right]_۳^۹-\int_۳^۹x\times\frac{۱}{x}dx=۹\ln ۲۷-۳\ln ۹-\left[x\right]_۳^۹=۲۱\ln ۳-۶$$



پاسخ سوال۵ : نقاط برخورد منحنی با محور xها دو نقطه با طول‌های $x_۱=۰$ و $x_۲=۱$ هستند.

$$V=\pi\int_۰^۱(x-x^۲)^۲dx=\pi\int_۰^۱(x^۲-۲x^۳+x^۴)dx=\pi\left[\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۱}{۲}x^۴+\frac{۱}{۵}x^۵\right]_۰^۱=\pi(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵})=\frac{\pi}{۳۰}$$

پاسخ سوال۶ : اگر $x\geq ۱$ آنگاه داریم $\frac{۱}{x^۳+۲e^x}<\frac{۱}{x^۳}$ و بنابر این : $۰<\int_۱^\infty\frac{dx}{x^۳+۲e^x}<\int_۱^\infty\frac{dx}{x^۳}=\left[\frac{-۱}{۲x^۲}\right]_۱^\infty=۰-\frac{-۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$

پس انتگرال ناسره همگراست.

پاسخ سوال۷ : داریم $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$ و در نتیجه $\sqrt{۱+(f'(x))^۲}=\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲-۱}}=\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}$ پس طول قوس خواسته

شده برابر است با : $\ell=\int_۳^۴\sqrt{۱+(f'(x))^۲}dx=\int_۳^۴\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}dx=\sqrt{x^۲-۱}\Big|_۳^۴=\sqrt{۱۵}-۲\sqrt{۲}$